Fonctions dérivables :

Rappel : $f : D_f \to \mathbb{R}$ définie dans un voisinage $I$ de $x_0 \in D_f$.

$f$ est dérivable en $x_0$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

(a) $\exists l := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe

(b) $\exists r : I \to \mathbb{R}$, continue en $x_0$, $r(x_0)=0$. ; $\exists l \in \mathbb{R}$ :
$$f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + (x-x_0)\cdot r(x).$$

(c) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ continue en $x_0$ :
$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\varphi(x). \quad , \varphi(x_0) =: l.$$

$l =: f'(x_0)$ est la dérivée de $f$ en $x_0$.

En effet : $b \Rightarrow c$ : $\varphi(x) = l + r(x)$.

$c \Rightarrow a$ : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \varphi(x) \to \varphi(x_0)$ (car $\varphi$ continue en $x_0$) $= f'(x_0)$.

$a \Rightarrow b,c$ : il suffit définir $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ continue en $x_0$ par hypothèse.

Notation : $f : I \to \mathbb{R}$ continue on dit de classe $C^0$ ($f \in C^0(I)$)

$f : I \to \mathbb{R}$ dérivable $\forall x_0 \in I$, et $f' : I \to \mathbb{R}$ continue, on dit de classe $C^1$ ($f \in C^1(I)$)

¿Exemples of $f \notin C^1(I)$ mais $f'$ défini en $I$ ?

$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. étendu de façon continue en 0.

$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

$\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$. Mais $\frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = x\sin\frac{1}{x} \to 0$ donc $\exists f'(0) = 0$

$f$ est dérivable en $\mathbb{R}$, mais $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

# Opérations sur les fonctions dérivables.

**Prop:** Soient $f, g$ deux fonctions définies au voisinage d'un point $x_0$ (resp. $x_0^+, x_0^-$) et dérivables en $x_0$ (à droite/gauche). Alors :

- Restriction : si $A \subset D_f$, $A$ voisinage de $x_0$ ($x_0^+, x_0^-$), alors

  $f|_A$ est dérivable en $x_0$ (à droite/gauche), et $f|_A'(x_0) = f'(x_0)$.

Produit par scalaire
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f$ est dérivable en $x_0$ (à droite/gauche) et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

- Somme : $f+g$ est dérivable au point $x_0$ (à droite/gauche) et

  $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

- Produit : $fg$ est dérivable au point $x_0$ (à droite/gauche) et

  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Preuve :
$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ g(x_0)}}{g(x)} \underset{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + \underset{f(x_0)}{f(x_0)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g'(x_0)}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

($g \in \mathcal{C}^0$) $\square$

- Rapport : Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en $x_0$ (à droite/gauche), et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Preuve, il suffit de montrer pour $f = 1$. $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} \longrightarrow -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \quad \square$$

Composition :

Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$ et dérivable en $x_0$.
Soit $g$ définie au voisinage de $f(x_0) =: y_0$ et dérivable en $y_0$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en $x_0$ et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Preuve On a par définition :

$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$ $\quad (\varphi(x_0) = f'(x_0),\ \varphi$ continue en $x_0)$

$g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y - y_0)$ $\quad (\psi(y_0) = g'(y_0),\ \psi$ continue en $y_0)$

$$\rightsquigarrow g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{y}) = g(f(x_0)) + \psi(f(x)) \cdot (\underbrace{f(x)}_{y} - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}) =$$

$$= g(f(x_0)) + \underbrace{\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)}_{\chi(x)} \cdot (x - x_0)$$

$\chi$ est continue en $x_0$, a (règles pour produit et composition)

et $\chi(x_0) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

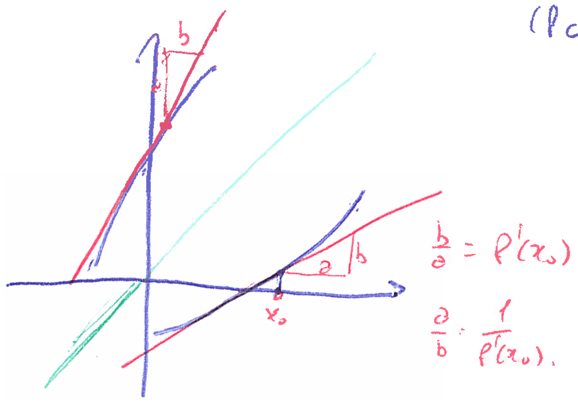
□

Dérivée d'une fonction réciproque

Prop: Soit $f : I \to J$ une fonction continue et bijective entre deux intervalles $I, J$, et dérivable en $x_0$. Supposons que $f'(x_0) \neq 0$. c.ex : $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.
Alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Preuve: $$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \underset{(f \text{ continue en } x_0)}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□



Exemple calculer $(f^{-1})'(2)$, $f(x) = x^4 + x$. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$.

1) $f$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, car $f'(x) = 4x^3 + 1 > 0 \quad \forall x > 0$.

Donc $f$ est injective, bijective avec son image $f(0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow f(]0,+\infty[) = ]0, +\infty[$ (valeurs intermédiaires). Donc $f$ est inversible

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f'(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}.$$

Exemples de dérivées.

$f(x) = c \to f'(x) = 0$.

$f(x) = ax + b \to f'(x) = a$. $\quad \dfrac{ax + \cancel{b} - ax_0 - \cancel{b}}{x - x_0} = a \to a$.

$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$) $\to f'(x) = nx^{n-1}$.

$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$ (par déf)

$f(x) = \ln x \to f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad \left( f'(x) = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x} \right)$

$f(x) = x^\alpha$ $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\to f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$ $\quad \left( x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \to f'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \right)$

$f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$ $\quad \left( \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \dfrac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \cdot \underbrace{\dfrac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow 0} + \cos x \cdot \underbrace{\dfrac{\sin h}{h}}_{\downarrow 1} \to \cos x. \right)$

$f(x) = \cos x \to f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x \to f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. $\quad \leftarrow \left( \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \to \tan' x = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \dots \right)$

$f(x) = \arcsin x \to f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. $\quad \Leftarrow \left( f'(y) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \right)$

$f(x) = \arccos x \to f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f(x) = \arctan x \to f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

$f(x) = \mathrm{sh}(x) \to f'(x) = \cosh(x)$. $\quad f(x) = \cosh(x) \to f'(x) = \sinh(x)$.

$f(x) = \tanh(x) \to f'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$

$f(x) = \mathrm{arcsinh}(x) \to f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\quad$ $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$f(x) = \mathrm{arccosh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\quad$ $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$f(x) = \mathrm{arctanh}(x) \to f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Proposition. Soit $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in ]a,b[$, et $f'(x_0) > 0$.
Alors $\exists \delta > 0$ : $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$
$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

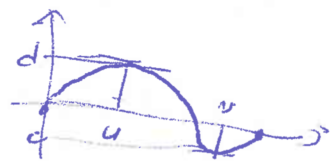
Corollaire : Si $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ atteint un maximum (ou minimum) locale en $x_0$ et elle est dérivable en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve : Par hypothèse, $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$ pour une certaine fonction $\varphi$ continue en $x_0$. $\varphi(x_0) = f'(x_0) > 0$, par continuité ; $\exists \delta > 0$ t.q. $\varphi(x) > 0$ ~~$\forall x \in$~~ $\forall x \in ]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[$. donc si $x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{\varphi(x)(x - x_0)}_{>0} > f(x_0)$
si $x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) = f(x) + \underbrace{\varphi(x)(x - x_0)}_{<0} < f(x_0)$. $\square$

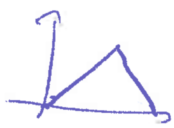
Preuve corollaire. Par contradiction.

Théorème (de Rolle). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists \xi \in ]a,b[$ t.q. $f'(\xi) = 0$.

Preuve : Par la propriété du maximum / minimum ($f$ continue sur un intervalle fermé), ~~$\exists$ ... t.q.~~
$\exists c, d$ t.q. $f([a,b]) = [c,d]$.




En particulier $\exists\, u, v \in [a,b]$ t.q. $f(u) = c$, $f(v) = d$.

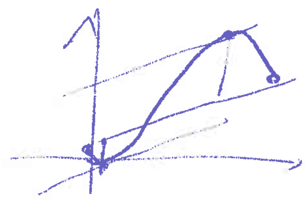



- Si $c = d$, alors $f$ est constante et $f'(x) = 0$ $\forall x$.
Si $c < d$, alors $f(u)$ ou $f(v)$ est différent de $f(a) = f(b)$, disons $u$. ~~c'est~~ Alors $u \in ]a,b[$ est un minimum locale.
Par le corollaire, $f'(u) = 0$. $\square$

Théorème des accroissements finis (ou de Lagrange) Cauchy...

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$

Alors $\exists\, \xi \in ]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$



Preuve. Soit $g(x) = f(x) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

alors $g(a) = f(a)$

$g(b) = f(b) - \cancel{(b-a)} \dfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} = f(a)$.

De plus, $g$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

$\left( g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)$.

Par Rolle, $\exists\, \xi \in ]a,b[$ t.q. $g'(\xi) = 0$, c'est-à-dire,

$f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Corollaires. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et dérivable sur $]a,b[$.

1 - Si $f'(\xi) = 0 \;\forall \xi \in ]a,b[ \Rightarrow f$ est constante.

2 - Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$, et $f'(\xi) = g'(\xi) \;\forall \xi \in ]a,b[$
alors $f(x) = g(x) + c$ $c$ constante. $\forall x \in [a,b]$

3 - Si $|f'(\xi)| \leq M \;\forall \xi \in ]a,b[$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| \;\forall x, x_0 \in [a,b]$.

1) Par absurde

2) 1 pour $f-g$

3) Par absurde

-

C18 - 4

Dérivée et monotonie

Proposition : (corollaire)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en $]a,b[$

- Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in ]a,b[$, alors $f$ est strictement croissante
- Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in ]a,b[$, alors $f$ est strictement décroissante

Preuve : Par étude, Lagrange

Donc la dérivée nous permet d'étudier la variation de $f$ (sur un intervalle)

Extrema :

Théorème (Fermat). Soit $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ dérivable. Supposons $\exists x_0 \in ]a,b[$ maximum ou minimum locale. Alors $f'(x_0) = 0$ ($x_0$ est dit point critique)

Preuve : déjà vue.

La dérivée nous dit donc aussi où rechercher les extrema de $f$ (dans un intervalle)

Exemple $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x \qquad f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x-1)^2(x+2)$

| | -2 | | ? | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | $-$ | $-$ | 0 $+$ | $+$ |
| $f'$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ |

$\Rightarrow -2$ point de minimum local (et globale)

1 n'est pas un point de minimum/maximum locale

$f(-2) = -24$

$f(1) = 3$

$f$ a deux solutions

Rmq : Avec les dérivées, on peut aussi calculer certaines limites. Exemples

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}$ si $f(x) = \sqrt{1+2x}$, alors $\frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$f(x)$ est dérivable en $x > -\frac{1}{2}$. donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} = f'(0)$

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}} \cdot \cancel{2}$, $f'(0) = \frac{1}{1} = 1$.

Plus en général, on a le théorème suivant.

Théorème (Bernoulli – l'Hospital)

Soient $f, g$ (épointé) deux fonctions continues dans un voisinage de $\omega$ (ω point généralisé) et dérivables dans un voisinage épointé de $\omega$.

Supposons que $g$ et $g'$ sont $\neq 0$ sur un voisinage épointé de $\omega$, et supposons que 1) $\lim_{x\to\omega} f(x) = \lim_{x\to\omega} g(x) = 0$.

ou 2) $\lim_{x\to\omega} |f(x)| = \lim_{x\to\omega} |g(x)| = +\infty$

de une façon que $\lim_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)}$ soit indéterminé.

Si $\exists\, \ell = \lim_{x\to\omega} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors $\lim_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Preuve: Pour $\omega = x_0^-$, cas 1., $\ell \in \mathbb{R}$.

Hypothèse nous dit: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.q. $x_0 - \delta < \xi < x_0 \Rightarrow \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell\right| < \varepsilon$

On veut montrer que $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta'>0$ t.q. $x_0 - \delta' < x < x_0 \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| < \varepsilon$

Comme $f, g$ est continue en $x_0$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, et analogue pour $g$

donc $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f(x)-0}{g(x)-0} - \ell\right| = \left|\frac{\frac{f(x)-0}{x-0}}{\frac{g(x)-0}{x-0}} - \ell\right|$.

Par le théorème d'accroissements finis (généralisé), $\exists\, \xi$ t.q. $\frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Donc

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell\right| \to 0.$$

□